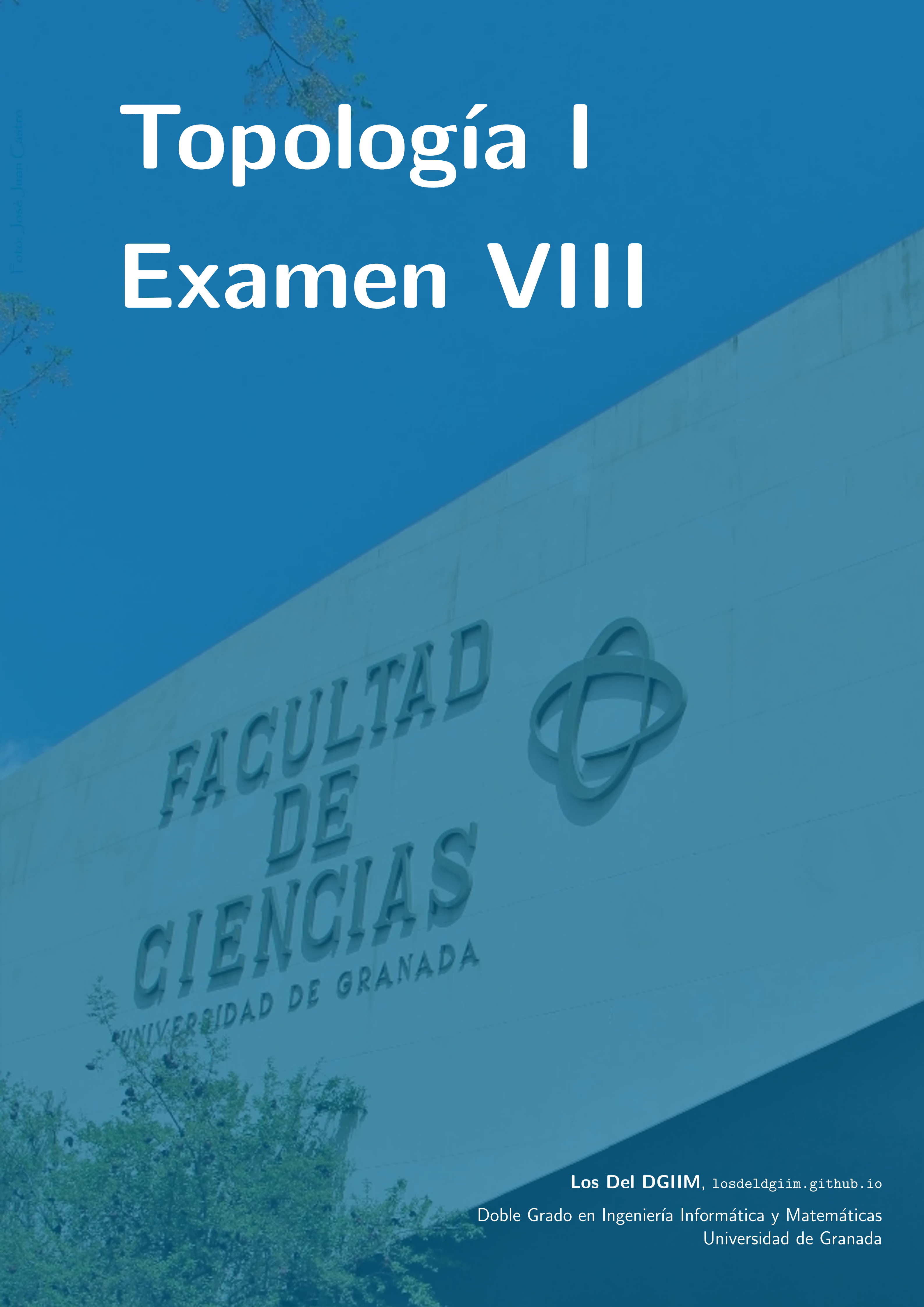


Foto: José Juan Castro

Topología I
Examen VIII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Topología I
Examen VIII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Topología I.

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Jose Antonio Gálvez López[1].

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 18 de enero de 2023.

Duración 3 horas.

[1] El examen lo pone el departamento.

Ejercicio 1 (5 puntos)**.** Sea $\|\cdot\|$ la norma euclídea usual en $\mathbb{R}^2$. Se consideran los conjuntos $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \leqslant 2\}$ y $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| = 2\}$. Para cada $p = (x,y) \in X$, se considera la siguiente familia:

- Si $p \in S$, $\beta_p = \{B((0,0),r) \cup \{p\} \mid 0 < r < 1\}$.
- Si $p \notin S$, $\beta_p = \{B(p,r) \mid 0 < r < 2 - \|p\|\}$.

Responde razonadamente a las siguientes preguntas:

1. (1.5 puntos) Demuestra que existe una única topología $\mathcal{T}$ en X tal que las familias anteriores forman una base de entornos de cada punto. En los siguientes apartados, se considera el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$.

   Demostramos las 4 condiciones del Teorema corespondiente. En primer lugar, sea $p \in S$:

   V1) Veamos que $\beta_p \neq \emptyset$. Como $]0,1[\neq \emptyset$, entonces $\beta_p \neq \emptyset$. Por ejemplo, $B(0, 1/2) \cup \{p\} \in \beta_p$.

   V2) Dado $V \in \beta_p$, de forma directa se tiene que $p \in V$.

   V3) Sean $V_1, V_2 \in \beta_p$. Tenemos que ver que $\exists V_3 \in \beta_p$ tal que $V_3 \subset V_1 \cap V_2$.
   Sean $V_1 = B(0,r_1) \cup \{p\}$ y $V_2 = B(0,r_2) \cup \{p\}$, con $r_1, r_2 \in]0,1[$. Entonces, tomando $r_3 = \text{mín}\{r_1, r_2\}$, tenemos que $V_3 = B(0,r_3) \cup \{p\} \in \beta_p$, y además $V_3 = V_1 \cap V_2$, por lo que V_3 cumple lo que buscamos.

   V4) Sea $V \in \beta_p$. Comprobemos que $\exists V' \in \beta_p$ tal que $V' \subset V$ y, para todo $q \in V'$, $\exists V_q \in \beta_q$ tal que $V_q \subset V$.
   Sea $V = B(0,r) \cup \{p\}$, con $r \in]0,1[$. Entonces, tomando $r' = r/2$, sea $V' = B(0,r') \cup \{p\} \in \beta_p$. Como $r' < r$, entonces $V' \subset V$. Sea ahora $q \in V'$:

   - Si $q = p$, tomamos $V_q = V'$, y tenemos que $V_q \subset V$.
   - Si $q \neq p$, entonces $q \in B(0,r')$, por lo que $q \notin S$. Por tanto, tenemos que $V_q = B(q, r_q) \in \beta_q$, para cierto $0 < r_q < 2 - \|q\|$. Calculemos r_q de forma que $V_q = B(q,r_q) \subset V$. Para ello, necesitamos que, para todo $x \in B(q,r_q)$, se tenga que $\|x\| < r$:

     $$\|x - q\| < r_q \Longrightarrow \|x\| < r_q + \|q\| < r_q + r' = r_q + \frac{r}{2} < r \Longleftrightarrow r_q < \frac{r}{2}$$

     Por tanto, tomando $r_q = \dfrac{\text{mín}\left\{\frac{r}{2},\ 2 - \|q\|\right\}}{2}$, tenemos lo buscado.

   Sea ahora $p \in X \setminus S$, por lo que $p \in B(0,2)$. Veamos que β_p cumple las condiciones del Teorema:

   V1) Veamos que $\beta_p \neq \emptyset$. Como $\|p\| < 2$, tenemos que $]0, 2 - \|p\|[\neq \emptyset$, por lo que $\beta_p \neq \emptyset$. Por ejemplo, $B(p, nicefrac2 - \|p\|2) \in \beta_p$.

   V2) Dado $V \in \beta_p$, de forma directa se tiene que $p \in V$.

V3) Sean $V_1, V_2 \in \beta_p$. Tenemos que ver que $\exists V_3 \in \beta_p$ tal que $V_3 \subset V_1 \cap V_2$.

Sean $V_1 = B(p, r_1)$ y $V_2 = B(p, r_2)$, con $r_1, r_2 \in]0, 2 - \|p\|[$. Entonces, tomando $r_3 = \text{mín}\{r_1, r_2\}$, tenemos que $V_3 = B(p, r_3) \in \beta_p$, y además $V_3 = V_1 \cap V_2$, por lo que V_3 cumple lo que buscamos.

V4) Sea $V \in \beta_p$. Comprobemos que $\exists V' \in \beta_p$ tal que $V' \subset V$ y, para todo $q \in V'$, $\exists V_q \in \beta_q$ tal que $V_q \subset V$.

Sea $V = B(p, r)$, con $r \in]0, 2 - \|p\|[$. Entonces, tomando $r' = r/2$, sea $V' = B(p, r') \in \beta_p$. Como $r' < r$, entonces $V' \subset V$. Sea ahora $q \in V'$:

- Si $\|q\| \geqslant 2$:
  Veamos que este caso no se puede dar. Como $q \in V' = B(p, r')$, entonces $\|q - p\| < r' < r < 2 - \|p\|$. Además, por la desigualdad triangular, tenemos que:

  $$\|q\| - \|p\| \leqslant \|q - p\| < 2 - \|p\|$$

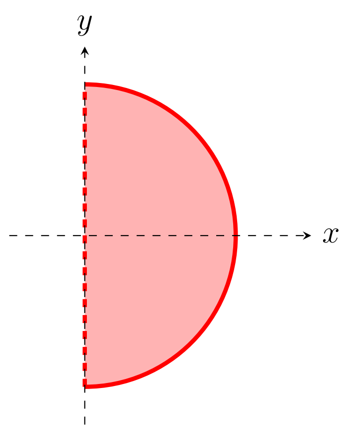
  Por tanto, tenemos que $\|q\| - \|p\| < 2 - \|p\|$, por lo que $\|q\| < 2$. Pero esto es una contradicción, ya que habíamos supuesto que $\|q\| \geqslant 2$.
- Si $\|q\| < 2$:
  Tenemos que $V_q = B(q, r_q) \in \beta_q$, para cierto $0 < r_q < 2 - \|q\|$. Calculemos r_q de forma que $V_q = B(q, r_q) \subset V$. Para ello, necesitamos que, para todo $x \in B(q, r_q)$, se tenga que $\|x\| < r$:

  $$\|x - q\| < r_q \Longrightarrow \|x\| < r_q + \|q\| < r_q + r' = r_q + \frac{r}{2} < r \Longleftrightarrow r_q < \frac{r}{2}$$

  Por tanto, tomando $r_q = \dfrac{\text{mín}\left\{\frac{r}{2},\ 2 - \|q\|\right\}}{2}$, tenemos lo buscado.

2. (1 punto) Dado el subconjunto $A = \{(x, y) \in X : x > 0\}$, calcula el interior y la frontera de A.

Representamos en la siguiente figura el conjunto A:



Calcularemos en primer lugar A°. Tenemos que:

$$p \in A^\circ \Longleftrightarrow \exists V \in \beta_p \mid V \subset A$$

Veamos que, si $p \in S$, entonces $p \notin A^\circ$. Sea $p \in S$, por lo que dado $V \in \beta_p$, se tiene que $V = B(0, r) \cup \{p\}$, con $r \in]0, 1[$. Por tanto, tenemos que $\left(-\frac{r}{2}, 0\right) \in V$, pero $\left(-\frac{r}{2}, 0\right) \notin A$, por lo que $V \not\subset A$. Por tanto, $p \notin A^\circ$.

Veamos entonces que $A^\circ = \widetilde{A}$, con:

$$\widetilde{A} = A \cap B(0, 2) = A \setminus S(0, 2) = \{(x, y) \in X \mid x > 0, \ \|(x, y)\| < 2\}$$

$\supset$) Sea $p = (x, y) \in \widetilde{A}$, y veamos que $p \in A^\circ$. Como $p \in X$, $p \notin S$, entonces dado $V \in \beta_p$, se tiene que $V = B(p, r)$, con $r \in]0, 2 - \|p\|[$. Buscamos el valor de r tal que $V = B(p, r) \subset A$. Para ello, necesitamos que, para todo $(x', y') \in B(p, r)$, se tenga que $(x', y') \in A$; es decir, $x' > 0$ y $\|(x', y')\| \leqslant 2$. Tomamos entonces $r = \min\{2 - \|p\|, \ x/2\}$, y veamos que $B(p, r) \subset A$:

$\subset$) Sea $q = (x', y') \in B(p, r)$, y veamos que $q \in A$. En primer lugar, comprobamos que $q \in X$, es decir, $\|q\| \leqslant 2$. Como $q \in B(p, r)$, entonces $\|q - p\| < r$, por lo que:

$$\|q - p\| < r \Longrightarrow \|q\| < r + \|p\| < 2 - \|p\| + \|p\| = 2$$

Por tanto, $q \in X$. Veamos ahora que $q \in A$, es decir, $x' > 0$. Supongamos que $x' \leqslant 0$, y veamos que esto es una contradicción. Como $q \in B(p, r)$, entonces $\|q - p\| < r$, por lo que:

$$\begin{aligned}\|q - p\| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} < r \Longrightarrow |x' - x| < r \Longrightarrow \\ \Longrightarrow x - r < x' < x + r \Longrightarrow x - r < x'\end{aligned}$$

No obstante, esto es una contradicción, ya que:

$$x - r > x - x/2 = x/2 > 0$$

Por tanto, $x' > 0$, por lo que $q \in A$.

Por tanto, como $\exists r \in]0, 2 - \|p\|[$ tal que $B(p, r) \subset A$, entonces $p \in A^\circ$.

$\subset$) Sea $p \in A^\circ$, y veamos que $p \in \widetilde{A}$. Sabemos que $p \in A$, y supongamos que $p \in A \cap S$. Como hemos visto antes, esto es una contradicción, ya que $p \notin A^\circ$. Por tanto, $p \in A \setminus S = \widetilde{A}$.

Por tanto, queda demostrado que $A^\circ = \widetilde{A}$. Calculemos ahora el cierre. Para ello, sabemos que:

$$p \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall V \in \beta_p, \ V \cap A \neq \emptyset$$

Veamos entonces que $\overline{A} = \widehat{A}$, con:

$$\widehat{A} = A \cup S \cup \{(0, y) \in X\}$$

$\supset$) Sea $p = (x, y) \in \widehat{A}$, y veamos que $p \in \overline{A}$. Distinguimos en función de si $p \in S$ o no:

- Si $p \in S$, entonces dado $V \in \beta_p$, se tiene que $V = B(0, r) \cup \{p\}$. Por tanto, tenemos que:

$$\left(\frac{r}{2}, 0\right) \in V \cap A \subset B(0, r) \cap A \neq \emptyset$$

- Si $p \in A \setminus S$, entonces dado $V \in \beta_p$, se tiene que $V = B(p, r)$, con $r \in]0, 2 - \|p\|[$. Por tanto,

$$p \in V \cap A = B(p, r) \cap A \neq \emptyset$$

- Si $p = (0, y)$, $y \neq \pm 2$, entonces dado $V \in \beta_p$, se tiene que $V = B(p, r)$, con $r \in]0, 2 - \|p\|[$. Por tanto, tomando $\delta = \text{mín}\{r/2, \sqrt{4 - \|p\|^2}\}$, tenemos que:

$$q = (\delta, y) \in V \cap A = B(p, r) \cap A \neq \emptyset$$

En primer lugar, tenemos que $q \in V$ ya que $\|q - p\| = |\delta| < r$. Veamos ahora que $q \in X$:

$$\|q\| = \sqrt{\delta^2 + y^2} \leqslant \sqrt{4 - \|p\|^2 + y^2} = \sqrt{4} = 2$$

Por tanto, $q \in X$. Además, como $\delta > 0$, entonces $q \in A$. Por tanto, $q \in V \cap A$.

Por tanto, en los tres casos, $\forall V \in \beta_p,\ V \cap A \neq \emptyset$, por lo que $p \in \overline{A}$.

$\subset$) Sea $p \in \overline{A}$, y veamos que $p \in \widehat{A}$. Supongamos que $p \in X$ pero $p \notin \widehat{A}$. Entonces, $p = (x, y)$, con $x < 0$ y $\|p\| < 2$. Veamos que esto es una contradicción. Como $\|p\| < 2$, entonces para todo $V \in \beta_p$, se tiene que $V = B(p, r)$, con $r \in]0, 2 - \|p\|[$. Consideramos entonces el valor $r = \text{mín}\{2 - \|p\|, -x/2\}$, y veamos que $V \cap A = \emptyset$. Para ello, sea $q = (x', y') \in V$, y veamos que $q \notin A$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}\|q - p\| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} < r \Longrightarrow |x' - x| < r \Longrightarrow& \\ \Longrightarrow x - r < x' < x + r \Longrightarrow x' < x + r&\end{aligned}$$

No obstante, tenemos que $x + r \leqslant x + -x/2 = x/2 < 0$, por lo que $x' < 0$, por lo que $q \notin A$. Por tanto, $V \cap A = \emptyset$, por lo que $p \notin \overline{A}$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $p \in \widehat{A}$.

Por tanto, queda demostrado que $\overline{A} = \widehat{A}$. Por tanto, tenemos que:

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = \widehat{A} \setminus \widetilde{A} = (A \cup S \cup \{(0, y) \in X\}) \setminus (A \cap B(0, 2)) = S \cup \{(0, y) \in X\}$$

3. (0.5 puntos) Estudia si $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff o no.

Veamos que no lo es. Sean $p, q \in S \subset X$, con $p \neq q$. Entonces tenemos que, para todo $V \in \beta_p$, $U \in \beta_q$, se tiene que $0 \in V \cap U$. Por tanto, $\nexists V \in \beta_p$, $U \in \beta_q$ tal que $V \cap U = \emptyset$, por lo que $(X, \mathcal{T})$ no es Hausdorff.

4. (1 punto) Estudia si $(X, \mathcal{T})$ es conexo o no.

Veamos en primer lugar que $V_p = B(p, 1/2)$ es conexo para todo $p \in X, \|p\| \leqslant 1/2$. Veamos que $\mathcal{T}_{V_p} \subset \mathcal{T}_{uV_p}$:

$\subset$) Sea $q \in V_p$, y un entorno básico de q en $\mathcal{T}_{V_p}$ será de la forma $B(q, r) \cap V_p$, con $r \in]0, 2 - \|q\|[$. Veamos que dicho conjunto es un entorno de q en $\mathcal{T}_{uV_p}$. Como $B(q, r) \in \mathcal{T}_u$, entonces $B(q, r) \cap V_p \in \mathcal{T}_{uV_p}$. Además, como $q \in B(q, r) \cap V_p$, entonces $B(q, r) \cap V_p$ es un entorno de q en $\mathcal{T}_{uV_p}$, por lo que se tiene que $\mathcal{T}_{V_p} \subset \mathcal{T}_{uV_p}$.

Por tanto, supongamos que V_p no es conexo, es decir, que existen $U, V \in \mathcal{T}_{V_p}$ no triviales tales que $U \cap V = \emptyset$ y $V_p = U \cup V$. Como $\mathcal{T}_{V_p} \subset \mathcal{T}_{uV_p}$, entonces $U, V \in \mathcal{T}_{uV_p}$, por lo que $\left(V_p, \mathcal{T}_{uV_p}\right)$ no es conexo, lo cual es una contradicción, ya que V_p es una bola abierta y sabemos que es conexa por ser estrellada. Por tanto, V_p es conexo.

Sea ahora $q \in S$, y consideramos $V_q = B(0, 1/2) \cup \{q\} \in \beta_q$. Veamos que V_q es conexo. Para ello, supongamos que V_q no es conexo, es decir, que existen $U, V \in \mathcal{T}$ no triviales tales que $U \cap V = \emptyset$ y $V_q = U \cup V$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $q \in U$. Como U es abierto, entonces U es entorno de q, por lo que $\exists r \in]0, 1/2[$ tal que $B(0, r) \subset U$. Como $U \cap V = \emptyset$, entonces $V \subset B(0, 1/2) \setminus B(0, r)$.

Consideramos ahora $V_0 = B(0, 1/2)$, y tenemos que $\mathcal{T}_{V_0} \subset \mathcal{T}_{uV_0}$. Sean $\widetilde{U} = U \cap V_0$, $\widetilde{V} = V \cap V_0$, y tenemos que $\widetilde{U}, \widetilde{V} \in \mathcal{T}_{V_0}$. Además,

$$\begin{aligned}
\widetilde{U} \cap \widetilde{V} &= (U \cap V_0) \cap (V \cap V_0) = U \cap V \cap V_0 = \emptyset \\
\widetilde{U} \cup \widetilde{V} &= (U \cap V_0) \cup (V \cap V_0) = (U \cup V) \cap V_0 = V_q \cap V_0 = V_0
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que V_0 es disconexo. No obstante, esto es una contradicción, ya que antes hemos visto que V_0 era conexo. Por tanto, V_q es conexo.

De esta forma, tenemos que:

$$X = S \cup (X \setminus S) = \left(\bigcup_{p \in S} \{s\}\right) \cup X \setminus S = \bigcup_{s \in S} \left(B\left(0, 1/2\right) \cup \{s\}\right) \cup X \setminus S \subset$$

$$\subset \bigcup_{s \in S} \left(B\left(0, 1/2\right) \cup \{s\}\right) \bigcup_{\substack{p \in X \\ \|p\| = 1/2}} B\left(p, \frac{1}{2}\right) \subset X$$

Por tanto, tenemos que:

$$X = B(0, 1/2) \cup \left(\bigcup_{s \in S} \left(B\left(0, 1/2\right) \cup \{s\}\right)\right) \bigcup_{\substack{p \in X \\ \|p\| = 1/2}} B\left(p, \frac{1}{2}\right)$$

Entonces, X es la unión de conjuntos conexos en $(X, \mathcal{T})$, y todos ellos intersecan a $B(0, 1/2)$, por lo que $(X, \mathcal{T})$ es conexo.

5. (1 punto) Estudia si $(X, \mathcal{T})$ es compacto o no.

Veamos que $X \setminus S$ es abierto. Sea $p \in X \setminus S$, y veamos que $\exists V \in \beta_p$ tal que que $V \subset X \setminus S$. Como $p \in X \setminus S$, entonces $\|p\| < 2$. Por tanto, dado $V \in \beta_p$, se tiene que $V = B(p, r)$, con $r \in]0, 2 - \|p\|[$. Tomamos entonces $r = \dfrac{2 - \|p\|}{2}$, y veamos que $V \subset X \setminus S$. Para ello, sea $q \in V$, y veamos que $q \in X \setminus S$. Como $q \in V$, entonces:

$$\|q - p\| < r = \frac{2 - \|p\|}{2} = 1 - \frac{\|p\|}{2} \Longrightarrow \|q\| < 1 - \frac{\|p\|}{2} + \|p\| = 1 + \frac{\|p\|}{2} < 2 \Longleftrightarrow \|p\| < 2$$

Por tanto, $q \in X \setminus S$, por lo que $V \subset X \setminus S$. Por tanto, $X \setminus S$ es abierto.

Veamos ahora que, dado $p \in S$, $U_p = B(0, 1/2) \cup \{p\}$ es abierto. Para ello, veamos que dado $q \in U_p$, $\exists V \in \beta_q$ tal que $V \subset U_p$. Distinguimos en función de si $q = p$ o no:

- Si $q = p$, entonces $V = U_p$ cumple lo que buscamos.
- Si $q \neq p$, entonces $q \in B(0, 1/2)$, por lo que $\|q\| < 1/2$. Por tanto, dado $V \in \beta_q$, se tiene que $V = B(q, r)$, con $r \in]0, 2 - \|q\|[$. Por tanto, tomando r lo suficientemente pequeño, tenemos que $V \subset B(0, 1/2)$, por lo que $V \subset U_p$.

Por tanto, U_p es abierto. Por tanto, consideramos el siguiente recubrimiento de X mediante abiertos:

$$X = \left(\bigcup_{p \in S} U_p\right) \cup (X \setminus S)$$

Supomgamos entonces que X es compacto. Entonces, dado dicho recubrimiento, existe un subrecubrimiento finito. Sea entonces $S_0 \subset S$ finito tal que:

$$X = \left(\bigcup_{p \in S_0} U_p\right) \cup (X \setminus S)$$

No obstante, esto es una contradicción, ya que S es no numerable (infinito), y S_0 es finito. Por tanto, hay puntos de S que no están en S_0, por lo que no están en dicho subrecubrimiento recubrimiento, lo cual es una contradicción.

Por tanto, X no es compacto.

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Elige una de las siguientes preguntas (2a o 2b):

2a. Da una definición de subespacio compacto en un espacio topológico y prueba las siguientes afirmaciones:

a) Un subespacio cerrado de un espacio topológico compacto es compacto.

b) Todo subespacio compacto de un espacio topológico Hausdorff es cerrado.

2b. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Todo entorno de un punto de un espacio topológico es abierto.

Esto es falso. Como contraejemplo, consideremos el espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, donde $\mathcal{T}_u$ es la topología usual. Entonces, el conjunto $[-2, 2]$ es un entorno de 0, ya que existe una bola abierta $]-1, 1[$ tal que se tiene que $0 \in]-1, 1[\subset [-2, 2]$. No obstante, este conjunto no es abierto, ya que no es entorno del 2.

b) Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico entonces la aplicación identidad dada por $Id : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}_{\text{CF}})$ es continua si y solo si $(X, \mathcal{T})$ es T1. Aquí, $\mathcal{T}_{\text{CF}}$ denota la topología cofinita.

Tenemos que Id es continua si y solo si $\mathcal{T}_{\text{CF}} \subset \mathcal{T}$. Veamos por tanto que es cierta mediante doble implicación:

$\Longrightarrow$) Supongamos que Id es continua, por lo que $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}} \subset \mathcal{T}$. Dados $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, entonces como $(X, \mathcal{T}_{\mathrm{CF}})$ es T1, entonces existen $U \in \mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$ con $x \in U$, $y \notin U$. Como $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}} \subset \mathcal{T}$, entonces $U \in \mathcal{T}$, por lo que $(X, \mathcal{T})$ es T1.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es T1, y veamos que $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}} \subset \mathcal{T}$. Para ello, veamos que $C_{\mathrm{CF}} \subset C_{\mathcal{T}}$. Sea $C \in C_{\mathrm{CF}}$. Entonces, C es finito, por lo que $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $C = \{x_1, \dots, x_n\}$:

$$C = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}$$

Como $(X, \mathcal{T})$ es T1, entonces $\{x\} \in C_{\mathcal{T}}$ para todo $x \in X$, por lo que C es una unión finita de cerrados, por lo que $C \in C_{\mathcal{T}}$. Por tanto, $C_{\mathrm{CF}} \subset C_{\mathcal{T}}$, por lo que $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}} \subset \mathcal{T}$ e $Id : \ (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}_{\mathrm{CF}})$ es continua.

c) Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es una aplicación biyectiva entre espacios compactos y T2, entonces f es continua si, y solo si, f^{-1} es continua.

Demostramos que es cierta mediante doble implicación:

$\Longrightarrow$) Supongamos que f es continua, y tenemos que f es biyectiva. Además, como $(X, \mathcal{T})$ es compacto y $(Y, \mathcal{T}')$ es T2, entonces f es cerrada. Como f es continua, cerrada y biyectiva, entonces f es un homeomorfismo, por lo que f^{-1} es continua.

$\Longleftarrow$) De manera análoga, como f^{-1} es continua, cerrada y biyectiva, entonces f^{-1} es un homeomorfismo, por lo que f es continua.

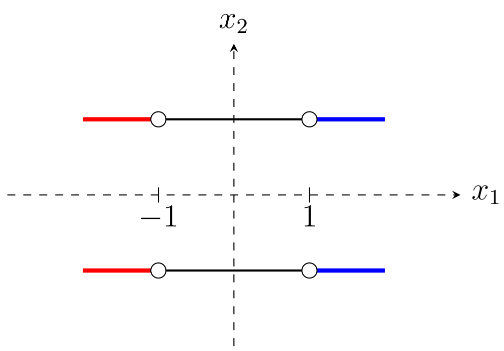
Ejercicio 3 (2.5 puntos)**.** En $X = \mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ consideramos la relación de equivalencia dada por:

$$(x_1, y_1)\mathcal{R}(x_2, y_2) \iff \begin{cases} (x_1, y_1) = (x_2, y_2), & \text{o bien} \\ x_1, x_2 > 1, & \text{o bien} \\ x_1, x_2 < -1. & \end{cases}$$

Si sobre X consideramos la topología usual inducida de $\mathbb{R}^2$, estudiar si:

1. La proyección canónica $p : X \to X/\mathcal{R}$ es una aplicación abierta,

   Veamos qué puntos identifica la relación de equivalencia:



   Demostremos ahora que es abierta. Para ello, una base de $(X, \mathcal{T})$ es:

$$\mathcal{B} = \{]a, b[\times \{1\},]a, b[\times \{-1\} \mid a, b \in \mathbb{R}, \ a < b\}$$

Demostramos para el caso de $]a,b[\times\{1\}$, y el otro caso es análogo. Distingumos entonces en función de a,b:

- Si $]a,b[\subset]1,+\infty[$:
  En este caso, tenemos que:
  $$p(]a,b[\times\{1\})=\{[\ ]1,+\infty[\times\{1,-1\}\ ]\}\in\mathcal{T}/\mathcal{R}$$
- Si $]a,b[\subset]-\infty,-1[$:
  En este caso, tenemos que:
  $$p(]a,b[\times\{1\})=\{[\ ]-\infty,-1[\times\{1,-1\}\ \}\in\mathcal{T}/\mathcal{R}$$
- Si $]a,b[\subset]-1,1[$:
  En este caso, tenemos que $]a,b[\times\{1\}\in\mathcal{T}_X$. Además,
  $$p(]a,b[\times\{1\})=]a,b[\times\{1\}\qquad p^{-1}(p(]a,b[\times\{1\}))=]a,b[\times\{1\}$$
  Por tanto, $]a,b[\times\{1\}$ es saturado, por lo que $p(]a,b[\times\{1\})\in\mathcal{T}/\mathcal{R}$.
- Si $-1<a<1$ y $b>1$:
  Tenemos que:
  $$p(U)=]a,1]\times\{1\}\cup\{[\ ]1,+\infty[\times\{1,-1\}\ ]\}$$
  Veamos que dicho conjunto es abierto. Sea el siguiente conjunto:
  $$V=]a,+\infty[\times\{1\}\cup]1,+\infty[\times\{-1\}\in\mathcal{T}_X$$
  Tenemos que $p^{-1}(p(V))=V$, por lo que $p(V)$ es abierto en $\mathcal{T}/\mathcal{R}$. Además, $p(U)=p(V)$, por lo que $p(U)$ es abierto en $\mathcal{T}/\mathcal{R}$.
- Si $a<-1$ y $-1<b<1$:
  Tenemos que:
  $$p(U)=\{[\ ]-\infty,-1[\times\{1,-1\}\ ]\}\ \cup\ [-1,b[\times\{1\}$$
  Veamos que dicho conjunto es abierto. Sea el siguiente conjunto:
  $$V=]-\infty,-1[\times\{-1\}\cup]-\infty,b[\times\{1\}\in\mathcal{T}_X$$
  Tenemos que $p^{-1}(p(V))=V$, por lo que $p(V)$ es abierto en $\mathcal{T}/\mathcal{R}$. Además, $p(U)=p(V)$, por lo que $p(U)$ es abierto en $\mathcal{T}/\mathcal{R}$.
- Si $a<-1$ y $b>1$:
  Tenemos que:
  $$p(U)=\{[\ ]-\infty,-1[\times\{1,-1\}\ ]\}\cup\{[\ ]1,+\infty[\times\{1,-1\}\ ]\}\cup[-1,1]\times\{1\}$$
  Veamos que dicho conjunto es abierto. Sea el siguiente conjunto:
  $$V=\mathbb{R}\times\{1\}\cup]-\infty,-1[\times\{-1\}\cup]1,+\infty[\times\{-1\}\in\mathcal{T}_X$$
  Tenemos que $p^{-1}(p(V))=V$, por lo que $p(V)$ es abierto en $\mathcal{T}/\mathcal{R}$. Además, $p(U)=p(V)$, por lo que $p(U)$ es abierto en $\mathcal{T}/\mathcal{R}$.

Por tanto, como para todos los abiertos de la base $\mathcal{B}$ se tiene que $p(U) \in \mathcal{T}/\mathcal{R}$, entonces p es abierta.

2. $X/\mathcal{R}$ es T2,

   En primer lugar, necesitamos calcular $X/\mathcal{R}$. Tenemos que:

$$X/\mathcal{R} = \{[\ ]1,+\infty[\times\{1,-1\}\ ], [\ ]-\infty,-1[\times\{1,-1\}\ ]\} \bigcup$$
$$\bigcup \{A \times \{1\}, A \times \{-1\}, A \times \{1,-1\} \mid A \subset [-1,1]\}$$

   Sea $x = \{1\} \times \{1\} = (1,1) \in X/\mathcal{R}$. Buscamos $U \in \mathcal{T}_X$ saturado tal que $\{x\} \in p(U)$. Como $p^{-1}(\{x\}) = x$, buscamos $U \in \mathcal{T}_X$ saturado tal que $x \in U$, por lo que U es entorno de x, y entonces $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $B((1,1),\varepsilon) \cap X \subset U$. Por tanto, se tiene que $U \cap (]1,+\infty[\times\{1,-1\}) \neq \emptyset$. Por tanto, como U es saturado,

$$(]1,+\infty[\times\{1,-1\}) \cup (1,1) \subset U$$

   Por tanto, tenemos que, tomando $x = [(1,1)]$ e $y = [\ ]1,+\infty[\times\{1,-1\}\ ]$, se tiene que $\forall U \in \mathcal{T}/\mathcal{R}$ con $x \in U$:

$$\{y\} \cap U \subset \{y\} \cap [\ (]1,+\infty[\times\{1,-1\}) \cup (1,1)\ ] = \{y\} \cap (\{y\} \cup \{x\}) = \{y\} \neq \emptyset$$

   Por tanto, no es T2.

   Otra opción de ver que no es T2 es ver que tampoco es T1. Para esto, veamos que $\{[\ ]1,+\infty[\times\{1,-1\}\ ]\}$ no es cerrado en $X/\mathcal{R}$.

   Buscamos $U \subset X$ saturado y cerrado tal que $p(U) = \{[\ ]1,+\infty[\times\{1,-1\}\ ]\}$. El único conjunto saturado de X tal que $p(U) = \{[\ ]1,+\infty[\times\{1,-1\}\ ]\}$ es $U =]1,+\infty[\times\{1,-1\}$, que no es cerrado, por lo que no existe dicho conjunto saturado y cerrado. Por tanto, $\{[\ ]1,+\infty[\times\{1,-1\}\ ]\}$ no es cerrado, por lo que $X/\mathcal{R}$ no es T1, por lo que tampoco es T2.

3. $X/\mathcal{R}$ es compacto,

   Sabemos que X no es compacto por no ser $\mathbb{R}$ acotado, por lo que el hecho de que la proyección p sea continua no nos sirve para demostrar si $X/\mathcal{R}$ es compacto.

   Opción 1: De forma directa.

   Para ver que sí es compacto, demostraremos que $X/\mathcal{R}$ es unión finita de compactos. Para ello, sean los siguientes conjuntos:

$$A_1 = \{[\ ]1,+\infty[\times\{1,-1\}\ ]\} \qquad A_2 = \{[\ ]-\infty,-1[\times\{1,-1\}\ ]\}$$
$$A_3 = [-1,1] \times \{1\} \qquad A_4 = [-1,1] \times \{-1\}$$

   Es directo ver que $X/\mathcal{R} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Además, A_1, A_2 son compactos por ser conjuntos unitarios. Veamos ahora que A_3 es compacto. En primer lugar, sabemos que es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$, por lo que es compacto en $\mathbb{R}^2$ y, como es cerrado en X, entonces es compacto en X. Además, como $\mathcal{T}/\mathcal{R}_{|A_3} = \mathcal{T}_{|A_3}$, entonces A_3 es compacto en $X/\mathcal{R}$. De forma análoga, se demuestra que A_4 es compacto.

Por tanto, $X/\mathcal{R}$ es unión finita de compactos, por lo que es compacto.

Opción 2: Usando que la proyección canónica es continua.

Sea $C = [-2,2] \times \{-1,1\} \subset X$ un conjunto compacto en X. por ser unión de dos compactos. Como p es continua, tenemos que $p(C) = X/\mathcal{R}$ es compacto.

4. $X/\mathcal{R}$ es conexo.

Sabemos que X no es conexo por no ser producto de conexos (ya que $\{-1,1\}$ no es conexo), por lo que el hecho de que la proyección p sea continua no nos sirve para demostrar si $X/\mathcal{R}$ es conexo.

Opción 1: De forma directa.

Para ver si es conexo, buscamos $p(U) \in \mathcal{T}/\mathcal{R} \cap C_{\mathcal{T}/\mathcal{R}}$. Es decir, buscamos U saturado tal que $U \in \mathcal{T}_X \cap C_{\mathcal{T}_X}$. Como $\mathbb{R}$ es conexo, los únicos abiertos y cerrados en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ son $\emptyset$ y $\mathbb{R}$. Por tanto, los conjuntos abiertos y cerrados en X son:

$$\emptyset,\ X,\ \mathbb{R} \times \{1\},\ \mathbb{R} \times \{-1\}$$

No obstante, los dos últimos no son saturados, por lo que los únicos abiertos y cerrados en X saturados son $\emptyset$ y X. Por tanto, $U = X, \emptyset$ por lo que $p(U) = X/\mathcal{R}, \emptyset$. Por tanto, tenemos que $X/\mathcal{R}$ es conexo.

Opción 2: Usando que la proyección canónica es continua.

Sea $A = [-2,2] \times \{-1\}, B = [-2,2] \times \{1\} \subset X$ dos conjuntos conexos en X. Como p es continua, tenemos que $p(A), p(B)$ son conexos en $X/\mathcal{R}$. Además, tenemos que:

$$X/\mathcal{R} = p(A) \cup p(B)$$

Además, $p(A) \cap p(B) \neq \emptyset$, ya que $p(2,1) = p(2,-1) = [\,]1, +\infty[\times \{1,-1\}\,] \in p(A) \cap p(B)$. Por tanto, como $X/\mathcal{R}$ es unión de dos conjuntos conexos con intersección no vacía, entonces $X/\mathcal{R}$ es conexo.